文章编号：1007-4619(2004)03-0214-06

遥感反演中不确定性信息处理的一种数学方法

王锦地，阎广建，王昌佐
(北京师范大学地理学与遥感科学学院遥感与地理信息系统研究中心，环境遥感与数字城市北京市重点实验室，
遥感科学国家重点实验室，北京 100875)

摘 要： 在遥感反演中对先验知识的表达和应用方法是多阶段目标反演中急需解决的关键问题。论述一种在遥感反演中处理不确定性信息的一种数学方法，引入未确知有理数和盲数的概念和运算方法，定量计算反演参数在可能取值区间上反演前后的可信度及其改变量。为遥感反演中先验知识的积累、更新和应用提供定量的方法依据。

关键词： 不确定性信息；可信度；遥感反演；先验知识

中图分类号： TP701 **文献标识码：** A

1 遥感反演中的不确定性信息问题

通过遥感机理模型的反演从遥感信号中获取地表参数的定量估计值，是遥感基础与应用研究普遍关注的问题。由于地表的复杂多变性，遥感机理模型对地表特征的准确描述要求较多的参数。在模型反演中，相对模型的参数量而言，目前遥感数据所能提供的信息量仍不能满足需求，造成了反演参数的不确定性及病态反演问题。

针对遥感反演中的病态问题，李小文等发展了基于先验知识积累的多阶段目标决策的反演模型[1,2]，在某个阶段的反演只应用敏感数据子集反演有限个模型参数，以求观测数据中有限信息量的有效应用，由此可将遥感反演认为是通过将新遥感观测信息注入参数，来实现对参数估计的不确定性的减小。那么很自然的问题是如何描述参数的不确定性、表达先验知识的可信度、判定观测数据能提供给参数的信息量，以支持对反演参数的阶段决策。如果把反演过程看作信息从数据到参数的传递过程，最有效的反演应该是数据提供的信息全部转变为反演参数信息量的增加。信息通信理论中，用信息传递过程中参数的后验概率和先验概率之比的对数值来表示传递的信息量[3]。据此我们提出了一种在遥感反演中度量数据空间和参数空间信息量的方法，改进了反演代价函数，用反演实验说明了反演过程中数据空间信息量到参数空间的传递，给出了反演后参数信息量的增加与数据空间信息量的关系[4]。

进而我们发现在多阶段反演中把参数视作随机变量处理具有一定的合理性，但不能适合反演参数变化的所有情况，在不同阶段反演前后参数可能取值的变化，很难总满足随机分布的假定，这就要求对参数不确定性的更为适用的数学描述。反演中先验知识积累，既为阶段反演提供观测数据以外的信息量，又为反演结果的可信度判定提供依据。先验知识的积累越丰富，为下阶段反演提供的信息的可信度越高；每一次有效观测数据条件下的阶段反演结果，又可累积先验知识，提高先验知识的可信度。由此，可信度需作为参数先验知识表达中，除估计值、不确定性以外的一个重要参量。本文采用未确知数学的理论，研究遥感反演中对参数先验知识和反演结果的可信度的表达方法，举例说明这种方法在遥感模型反演中的应用。

2 未确知信息、未确知数与盲数

研究信息的表达和处理是众多领域中进行定量

收稿日期： 2003-01-21；**修订日期：** 2003-06-24

基金项目： 国家自然科学基金项目(40171068)、国家重点基础研究发展规划项目(G20000779)、高等学校骨干教师资助计划项目。

作者简介： 王锦地(1955—)，女，教授，1982 年毕业于北京邮电学院无线电技术专业，现主要从事遥感基础理论和遥感实验的科研与教学工作，已发表第一作者论文 20 篇。

分析中的重要一步。信息可以分为完整信息和不确定性信息。对不确定性信息的数学描述有 4 种,即随机信息、未确知信息、模糊信息和灰信息,分别用概率统计、未确知数学、模糊数学和灰色数学来表达和处理。其中,概率统计这样的现成数学方法很容易用来处理随机信息。信息论的研究主要针对随机信息及其量化,并用熵的概念定量表达信息量。但是还有很多不确定性信息是不能用随机分布的概率密度函数来表示的,因而出于对各种不确定性信息处理的需要,产生出相对更为适用的数学方法。未确知数学是其中之一。

未确知数学是处理未确知信息的数学方法[5]。未确知信息与已定义的随机信息、模糊信息和灰信息不同,其特点是它的不确定性主要不是客观的,而是决策者主观的、认识上的不确定。也就是说,它可以是正在发生或已发生的事物,也可以是未来事物;事物自身可能是确定的(已存在或已发生的事物),也可以是不确定的(如未来事物);但是,对于决策者来说,由于主观和客观的原因,而不能完全认识该事物的真实状态或确定的数量关系,因而在决策者的心目中,产生主观的、认识上的不确定性,这种不确定性称为未确知性。即未确知的本意是:不管事物本身是确定的还是不确定,对决策者来说,它是部分已知、部分未知,因而是未确知的。比如,只知道一个数落在区间[a,b]上,那么这是一个区间灰数,如果知道一个数落在区间[a,b]上,同时还知道它在该区间上可能取值的某种分布,这就是一个未确知数。这与我们遥感定量反演中遇到的对未确知反演参数的描述问题极为相似。

2.1　未确知有理数和可信度

对未确知信息作数学处理的基本原理来自于未确知有理数的概念[5]。

定义 1:设 a 为任意实数,$0<\alpha<1$,称[[a,a],φ(x)]为一阶未确知有理数。其中

$$\varphi(x)=\begin{cases}\alpha,\text{当 } x=a \text{ 时},\\ 0,\text{当 } x\neq a \text{ 且 } x\in R \text{ 时} \quad (R \text{ 为实数集})\end{cases} \tag{1}$$

其直观意义是,某量在闭区间[a,a]内取值,且是 a 的可信度为 φ(x)=α。当 α=1 时,表示某量是 a 的可信度为百分之百。当 α=0 时,表示某量是 a 的可信度为零。

定义 2:对任意区间[a,b],$\alpha=x_1<x_2<,\cdots,<x_n=b$,若函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\varphi(x)=\begin{cases}\alpha_i, x=x_i(i=1,2,\cdots,n)\\ 0,\text{其它}\end{cases} \tag{2}$$

且 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\alpha, 0<\alpha\leqslant 1$,则称[a,b]和 φ(x)构成一个 n 阶未确知有理数,记作[[a,b],φ(x)],称 α,[a,b]和 φ(x)分别为该未确知有理数的总可信度、取值区间和可信度分布密度函数。

由分布密度函数 $\varphi(x)$ 可知,真值取区间[a,b]中 x_i 的可信度为 α_i,使 $\varphi(x)$ 非零的 x 的取值个数 n 为该未确知有理数的阶数。

$n=1$ 时,即为式(1)定义的一阶未确知有理数。当 $n=1$,且 $\alpha=1$ 时就是实数,这是实数的另一种表达方式,可理解为:经无数次测量,每次测量信号都是同一个实数,显然,该实数即为欲知量的真值,说明该量为确知量。

若对某量做 m 次测量,得一个 n 阶未确知有理数($n\leqslant m$)。它的阶数 n 小,表示测量结果集中于某些测量值,即测量的不确定程度较小;它的阶数大,表示对某量的测量值离散性大,表达为该量的不确定程度高。

定义 3:设未确知有理数 $A=[[x_1,x_n],\varphi(x)]$,其中

$$\varphi(x)=\begin{cases}\alpha_i, x=x_i(i=1,2,\cdots,n)\\ 0, x\neq x_i\end{cases} \tag{3}$$

$$0<\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\alpha\leqslant 1, 0<\alpha_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n$$

若函数 $F(x)$ 满足:

$$F(x)=\begin{cases}0, x<x_1\\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i, x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}\\ \qquad (i=1,2,\cdots,n-1)\\ \alpha, x\geqslant x_n\end{cases} \tag{4}$$

则称闭区间$[x_1,x_n]$与函数 F(x)构成分布型未确知有理数,记作$\{[x_1,x_n],F(x)\}$。称 α,$[x_1,x_n]$,和 $F(x)$分别为该分布型未确知有理数的总可信度,分布区间和可信度分布函数。

用未确知有理数描述和表达不确定信息的一个优势,在于有一套对未确知有理数进行加、减、乘、除运算的数学方法。未确知有理数的运算基于对两个未确知有理数的可能值和矩阵和可信度积矩阵的定义,由严格的定义给出未确知有理数的加法运算法则[5]。类似地可以进行两个未确知有理数的相减和乘除法运算,比较未确知有理数间的大小,计算未确知有理数的数学期望和方差等。这为定量计算参数反演前后可信度的变化提供了一种很好的数学工具。

从对未确知有理数的定义和运算处理中,可以看到

这种数学处理方法有两个最显著、对遥感反演最有用的特点。其一是它不要求对参数可信度的描述遵循常用特定的分布函数模式,除原始分布数据外,不需要人为假设,所有的运算都可以基于对离散分布点的算术计算,而盲数则将分布点扩展到分布区间。其二是运算中它保留所有可信度分布的已知信息,直接参与定量运算,因而这种运算本身带来的累积误差可以减小。

2.2 盲数及其运算方法

对随机信息、未确知信息、模糊信息、灰信息这4种不确定性信息,若讨论的问题只涉及其中的一种,则比较简单,称之为"单式"信息,任意复杂的信息称为"信息混沌",从信息混沌类中分离出一种最多同时具有两种上述4种不确定性的较为复杂的信息称为"盲信息"。对盲信息的处理要引入盲数的概念[5]。

将未确知有理数扩展到盲数,是通过对未确知有理数中 $x=x_i$, x_i 为实数的定义的扩展来实现的。比如 $\varphi(x_i)=\alpha_i$ 表示真值取实数 x_i 的可信度为 α_i,而实际问题提供的背景式:真值不是落在点 x_i,而是落在 x_i 附近的可信度为 α_i 的区间才更合理。就是说,x_i 不再是实数,而是一个区间灰数。当未确知有理数 $\alpha(x)$的定义域从实数 R 扩展到区间型灰数集 $g(I)$后,$\varphi(x)$则从未确知有理数扩展到盲数。

定义4:设 R 为实数集合,$\overline{R}$ 为未确知有理数集,$g(I)$为区间型灰数集。

设 $a_i \in g(I)$, $a_i \in [0,1]$, i=1,2,…,n,$f(x)$为定义在 $g(I)$上的灰数集,且

$$f(x)=\begin{cases}\alpha_i,x=a_i(i=1,2,\cdots,n)\\0,\text{其它}\end{cases} \tag{5}$$

若当 $i\neq j$ 时,$a_i\neq a_j$,且 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\alpha\leqslant 1$,则称函数 $f(x)$为一个盲数。称 a_i 为 x 取 a_i 值时 $f(x)$对应的可信度,称 α 为 $f(x)$的总可信度,称 n 为 $f(x)$的阶数。对真盲数,a_i 用区间表示。

由盲数的定义,未确知有理数可以看作是盲数的特例。真盲数所包含的信息至少含有两种不确定性,所以,可借助盲数研究盲信息的数学表达和数学处理。对盲数的运算可采用类似于未确知有理数的运算方法。通过盲数的运算,可以得到盲数组合后的所有可能取值区间和取值可信度之间的对应关系,进而采用成熟模型可求算盲数的可信度,供决策者从不同的角度进行分析。

3 未确知有理数和盲数用于对反演参数可信度的估计

3.1 反演参数可信度的表达

遥感反演的目的就是要获取待反演参数更小的不确定性范围和更大的可信度。用一次观测数据对参数反演的结果,即积累作为下次反演的先验知识。未确知有理数和盲数可用作对参数先验知识可信度的描述。

未确知数学的基本概念表明,未确知有理数具有这样一种表达欲知量可信度的功能。通常,当人们对某个欲知量的测量结果不敢轻信时,采用取多次测量的算术平均值,用一个实数表达结果以抵消随机测量误差。但是并不知道用这个均值近似欲知量具有多大的可信度,也许这些多次测量中有一些完全不合理,而另一些具有较小的误差。为此我们引入可信度概念来弥补均值法的不足。从以上定义,如果测量总次数为 m,测量得到某个值的次数为 x_i,总可信度为 α,那么每个测量值的可信度可用式(6)计算:

$$\alpha_i=\frac{\alpha}{m}x_i \tag{6}$$

由此可见,未确知有理数的可信度的分布,取决于测得值的测量次数,而测得某个值的测量次数越多,则相对讲这个值为欲知量的可信度越大。这样,未确知有理数用可信度分布的方式更准确地表达了测量结果对欲知量的可信程度。

在遥感反演中,要得到的参数解即为欲知量。对欲知量有两种表达,一种是对参数已有的知识,表达为反演前的先验知识,可以是一个估计值(均值)和它的不确定性(方差);另一种是反演过程中,当改变其它反演条件和参数值时,得到待反演参数取值的概率密度分布,称做参数的后验概率密度分布,来自于反演中取到可能值的次数统计。反演结果通常取其中概率最大者,即次数最多者。引入未确知有理数的计算方法,从参数在反演中取到可能值的次数统计,在总可信度已知的情况下,用式(6)可以计算可能取值的可信度及其分布;或在总可信度未知的情况下,可以得到可信度分布和总可信度之间的关系($\alpha_i/\alpha=x_i/m$)。

从先验知识积累的角度,如果每一次观测数据都提供有效的反演,对参数欲知量的总可信度将随着观测次数的增加而增加,未确知有理数可以用来

表示这种总可信度的变化,从反演过程的角度,反演中参数取得某值的次数,实际表示了取值的可信程度,未确知有理数可以用来表示这种可信度的分布特征。(注意这里参数取值的概率密度分布、参数取值的可信度分布、参数估计值对欲知量的总可信度在概念上的差别。)在利用未确知有理数分析反演过程中可信度的分布时,我们用参数取值的次数统计结果来计算参数取值的可信度分布,并进而讨论对给定参数取值区间上参数可信度变化的表示及其对反演结果可信度的判定支持。而对参数估计值的总可信度,则需要通过对参数取值可信度分布的运算,获得其在经过多次反演实现知识积累中的增加量,这要用到盲数的概念和运算方法。

3.2　估算反演参数可信度的应用实例

遥感反演中所谓先验知识,是指在某阶段反演前,已经具有的对这些待反演模型参数的知识,目前多表达为对参数的初始猜测值及其不确定性范围,用统计量或分布来定量表达。先验知识的可信度,表达对先验知识的积累程度。显然,积累的先验知识越多,先验知识的可信度越高;遥感观测提供的有效信息越多,提供给反演参数的信息量越大,反演对可信度提高的贡献越大,参数可信度的增加量越大。

从上述对用未确知有理数定量表达测量可信度的分析可知,利用未确知有理数的概念,可以将式(6)的计算法用到对反演参数可信度的计算。这里采用未确知有理数的优点,对可信度的表达是离散型的,可以根据具有的知识来估计计算,完全不要求表达为特定的统计分布形式,就可以方便计算和运算。

当我们更多地关心反演参数的可信度分布区间时,使用盲数的表达方式更为方便。

下面我们以用行播作物热红外遥感模型反演作物冠层组分温度 T_v 和阴影土壤组分温度 T_{shadow} 的结果为例,来说明如何用未确知有理数来定量表达反演参数的可信度,和对反演后参数可信度的变化的计算。实例中所用的农作物热红外遥感模型参见参考文献[6],反演算法中采用的 Tarantola 代价函数为[7]:

$$pdf_{post} = \exp\{-0.5 * (\sum(\dot{R} - R)^2 / C_d^2 + \sum(d_{obs}(i) - d_{ini}(i))^2 / C_p^2)\} \tag{7}$$

其中包括两部分,其一决定于模型计算的像元方向辐射 $\dot{R}$ 与观测数据 R 的偏差;其二决定于参数的先验知识 d_{ini} 与待反演参数 d_{obs} 的偏差。上式中 C_d、C_p 分别为数据和参数的标准偏差。

(1) 设对给定待反演参数的先验知识的可信度表达为离散分布形式,如图 1、图 2 所示的先验知识的可信度分布。对应 T_v 和 T_{shadow} 的均值分别为 23.2℃和 21.6℃,标准偏差为 5℃。可见先验知识的方差较大,在区间 18—28℃的总可信度 α 小于 1,各可能取值区间的可信度相对较小。利用式(6)的计算结果如表 1,对应式(5)所定义的盲数 $f(x)$ 的离散表达形式。

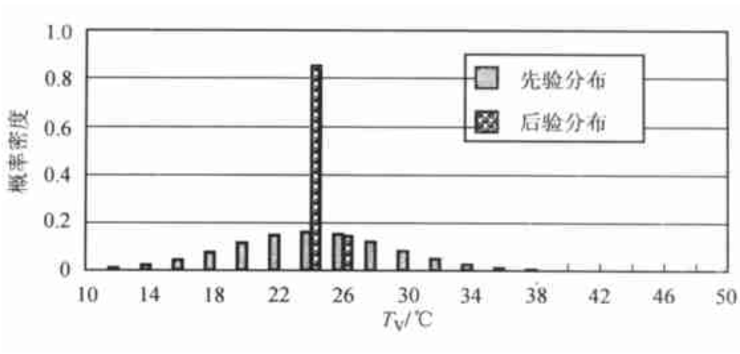

图 1　待反演参数 T_v 在反演前后的可信度分布

Fig.1　The reliability distribution of a priori knowledge and posterior probability for parameter T_v

表 1　参数先验知识在各区间的可信度

Table 1　The reliability distribution of a priori knowledge

参数区间/℃	18—20	20—22	22—24	24—26	26—28
可信度(T_v)	0.112	0.144	0.158	0.149	0.119
可信度(T_{shadow})	0.138	0.156	0.155	0.125	0.088

从表1可以看到,这一可信度的先验分布表示了在不同的参数可能取值区间上可信度的差别。在区间[22,24]上,参数取到真值的可信度约为0.16,与其余各区间的可信度差别不大。

(2) 利用观测数据的信息,经过一次遥感模型反演,得到反演过程中参数在可能取值区间中取值次数的分布,用式(7)计算其可信度的分布见图1、图2的后验分布及表2。

表2 后验信息在各区间的可信度

Table 2 The reliability distribution of posterior information

参数区间/℃	18—20	20—22	22—24	24—26	26—28
可信度(T_v)	0	0.004	0.855	0.141	0
可信度(T_{shadow})	0.291	0.269	0.140	0.037	0.005

对参数 T_v 的反演,比较反演前后的参数可信度分布,可见对区间[22,24],反演后参数取到该值的可信度从0.158增加到0.855,真值取在[22,24]的不确定性减小。这一结果告诉我们,经过这次反演参数 T_v 在区间[22,24]取到真值的可信度增大,这可以作为更新先验知识时确认其分布的依据,增加下一阶段参数反演到真值的可能性。

(3) 如果参数先验知识可信度值较大的区间为[K_1,K_2],而反演后可信度值较大的区间在另外的[K_2,K_3],那么对此次反演结果而言,真值取在区间[K_2,K_3]的不确定性是减小了,但是参数反演到真值在区间[K_1,K_2]的可信度没有增加,而真值在区间[K_2,K_3]的可信度增加了。从总体上看,有可能参数取到区间[K_1,K_2]和区间[K_2,K_3]的可能性是相近的,参数反演到真值的总可信度没有增加。

例如对另外一个参数 T_{shadow} 的反演,先验知识可信度较大的区间为[20,22]和[22,24],而后验信息可信度最大的区间则为[18,20]。反演前后在讨论可能取值区间[18,28]上的总可信度变化不大(从0.662到0.745)。此次反演结果说明原先验知识的分布可能需要更改。对可信度计算的结论可作为先验知识更新的依据,用于以后阶段的反演。

注意我们这里仅讨论某区间上可信度的改变问题。

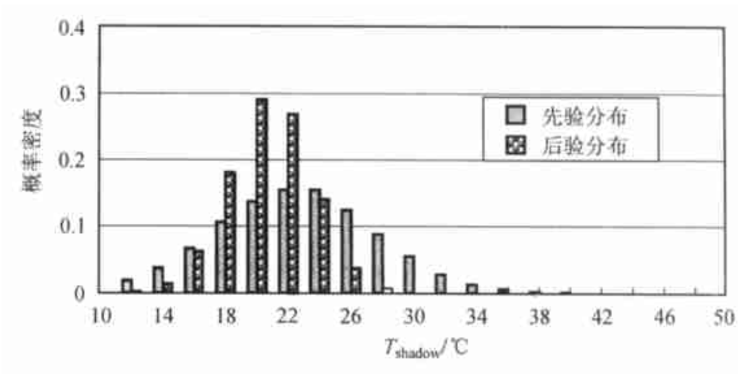

图2 待反演参数 T_{shadow} 在反演前后的可信度分布

Fig.2 The reliability distribution of a priori knowledge and posterior probability for parameter T_{shadow}

4 结论与讨论

未确知有理数和盲数的数学概念和理论,是在对不确定信息描述的需求中发展起来的,并已应用于工程理论等科技和生产领域,解决应用中的实际问题[8]。本文尝试将其用于遥感反演中对先验知识和参数反演结果可信度的描述,以求对先验知识的积累程度的定量表达。这种表达的优势在于,它适用于任意的参数先验知识的分布形式,不再要求限定假设的分布来满足参数可信度变化运算要求。采用这种数学方法,主要支持在多阶段反演中对先验知识信息的处理,提供一种可行的定量计算方法,为先验知识的积累和更新提供计算依据。作为发展遥感反演理论与方法的实用数学工具,本文工作的初步的探讨,仅说明了它的可用性。如何将这种数学工

具有效地用于多阶段反演,如对反演中代价函数的修正,还需要进一步研究。

参考文献(References)

[1] Li X W, Yan G J, Liu Y, *et al*. Uncertainty and Sensitivity Matrix of Parameters in Inversion of Physical BRDF Model [J]. *Journal of Remote Sensing*, 1997, **1**(Suppl.):113—122. [李小文,阎广建,刘毅等 BRDF 物理模型反演中的不确定性与敏感性矩阵[J].遥感学报 1997, **1**(增刊):113—122.]

[2] Li Xiaowen, Wang Jindi, Hu Baoxin, *et al* On Utilization of Prior Knowledge in Inversion of Remote Sensing Model [J]. *Science in China* (*Series* D), 1998, **41**(6):580—586. [李小文,王锦地,胡宝新等. 论先验知识在遥感反演中的应用[J].中国科学(D辑),1998,**28**(1):67—72.]

[3] Roste. A M. Information and Communication Theory [M], 1973. [钟义信,李道本,王继先译,信息与通信系统[M]. 北京:人民邮电出版社,1979.]

[4] Wang Jindi, Li Xiaowen, Sun Xiaomin, *et al*. Component Temperatures Inversion for Remote Sensing Pixel Based on Directional Thermal Radiation Model [J]. *Science in China* (*Series* E), 2000, **43**(Suppl.):41—47.

[5] Liu Kaidi, Wu Heqin, Pang Yanjun, *et al*. Unascertained Information Mathematics Process and its Applications[M]. Beijing Science Press, 1999. [刘开第,吴和琴,庞彦军等,不确定性信息数学处理及应用[M].北京:科学出版社,1999.]

[6] Yan Guangjian, Jiang Lingmei, Wang Jindi, *et al*. Thermal Bi-directional Gap Probability Model for Row Crop Canopies and Validation [J]. *Science in China*, (*Series* D), 2003, **46**(12):1241—1249.

[7] Albert Tarantola. Inverse Problem Theory: Method for Data Fitting and Model Parameter Estimation[M]. Elservier Science Publishers, B. V., 1987.

[8] Pang Yanjun, Liu Kaidi, Nui Guixia, The Application of Unascertained Mathematics to the Calculation of the Generating Capacity of Hydropower Station [C]. GSSA, Wu Han, 1996.

A Mathematical Approach on Uncertain Information Process in Remote Sensing Inversion

WANG Jin-di, YAN Guang-jian, WANG Ghang-zuo

(*Research Center for Remote Sensing and GIS*, *Depactment of Geography*, *Beijing Key Laboratory for Remote Sensing of Environment and Digital Cities*, *Beijing Normal University*, *State Key Laboratory of Remote Sersing Science*, *Beijing* 100875, *China*)

Abstract: Remote sensing inversion algorithms exist the problems of land surface parameters retrieval by means of remote sensing physical models, which is also a key problem in remote sensing image interpretation. We developed a priori knowledge based remote sensing inversion strategy. All the available information on parameters gained from the former inversion stages are taken as the prior knowledge in the next stage's inversion. To do the inversion objectively, we need to describe the information content that the parameters get in each inversion stage, and the reliability of the accumulated knowledge as well. The concepts and theory of unascertained number and blind number are developed from the requirements of describing the uncertain information in application. They have been used in some techniques and producing fields to solve the practical problems, such as that used in the engineering theory. Our new approach is to describe the reliability of the inverted parameter and accumulated knowledge by the definition of the unascertained number. For the inverted parameter, during the inversion stage, the changing of its reliability then can be calculated by using math method of the unascertained mathematics, which is used to judge the inversion result and to modify the prior knowledge about the parameter. This is expected to be a quantitative expression of the accumulation of a priori knowledge. We take the land surface temperatures inversion as an example to show how the new method works.

Key words: uncertain information; reliability; remote sensing inversion; a priori knowledge